

48 Labor



Revista de Ensino Liceal

Directores: JOSÉ TAVARES e ÁLVARO SAMPAIO

Sumário

Resolução de equação bi-quadrada no caso de $b^2 - 4ac > 0$, pelo processo geométrico (pág. 161) . . .	Alexandre Rodrigues Feliciano Ramos
O destino dum tema célebre (pág. 166)	
A «Menina e Moças» e o romance sentimental no Renascimento (pág. 183)	António Salgado Júnior
Estudar (pág. 198)	Mário Gonçalves Viana
L'Education Nationale et la guerre (pág. 202)	René Laporte
Mapa das percentagens de exclusões do 3.º ciclo, por liceus do continente, e por disciplinas, na época de Julho de 1939 (pág. 204) . . .	A Redacção
Perguntas e respostas (pág. 205) . .	Álvaro de Athayde
Liceus e Colégios:	
<i>Liceu de Angra, Aveiro, Portalegre, Guarda, Lisboa (Pedro Nunes) e Lamego</i> (pág. 208)	O. Pereira e Redacção
Bibliografia (pág. 216)	J. L., A. C. e A. S.
Vida oficial (pág. 222)	
Pontos dos exames de 1939:	
<i>Língua portuguesa (Admissão aos Liceus); Ciências Naturais (1.º ciclo); Latim, Algebrá e Trigonometria, e Ciências Físico-Químicas (2.º ciclo); Latim e Geografia (3.º ciclo)</i> (pág. 224)	

LIVROS

nacionais e estrangeiros
para tôdas as escolas do país

encontrá-los-ão sempre na nossa casa

MOBILIÁRIO E MATERIAL ESCOLAR

o melhor e o mais económico
peçam o catálogo ilustrado

LITERATURA ANTIGA E MODERNA

NACIONAL E ESTRANGEIRA
peçam os catálogos respectivos

LIVROS CIENTÍFICOS E TÉCNICOS

NACIONAIS E ESTRANGEIROS
peçam os catálogos respectivos

A Livraria Sá da Costa é a única que
reúne tôdas as secções de livraria

ENCOMENDAS PARA O ES- TRANGEIRO

mantemos um serviço diário de
encomendas, para todos os paí-
ses, da maior rapidez e economia

LIVRARIA SÁ DA COSTA — EDITORA

24, L. DO POÇO NOVO — LISBOA
TELEF. 2 2016 — TELEG. LIVROSACOSTA

COLÉGIO INSTITUTO SECUNDÁRIO

Colégio aprovado oficialmente — Fundado em 1904

Externato para ambos os sexos

Travessa da Queimada, 23, 1.º, a S. Roque — Telefone 2 1608

LISBOA

Está aberta a matricula para:

Instrução Primária, Curso dos Liceus, Comercial, Línguas
Exames de admissão aos Liceus e Universidades

SALAS DE ESTUDO

Direcção de JOSÉ IGNÁCIO PINTO RODRIGUES

Aos Estabelecimentos de Ensino Secundário

QUADROS PARIETAIS PARA O ENSINO DA BIOLOGIA

POR

SEOMARA DA COSTA PRIMO

Professora efectiva do liceu de Maria Amália, encarregada
de curso na Universidade de Lisboa, autora de Compêndios
de Botânica, Zoologia e Biologia para o ensino liceal.

Colecção de dez quadros — I Série — 90 × 70, tratando os
principais capitulos do programa, a negro e a cores, acom-
panhados de folheto explicativo. — Preço — 200\$00.

Montados em pano e com baguetes — Preço — 300\$00.

Portes à parte.

Pedidos à

Livraria Bertrand

Rua Garret, 75 — LISBOA

ELECTRO-MECANICA DO MINHO, L. DA

Tele { fone : 8
grato : TABACARIA ELEGANTE—BRAGA

BRAGA

MATERIAL CIENTÍFICO E ESCOLAR

Representações e fornecimentos de Material de Física, Química, Naturais, Geografia, etc.

MOBILIÁRIO ESCOLAR

Representações e fornecimentos das casas: E. Leybold's, Max Mohl, Gerhardt, Ströblein, E. Merck, Dr. F. Krantz, Negrotti & Zambra, Jules Richard, Casella, etc., etc.

PEDIR ORÇAMENTOS

Colégio de Mousinho de Albuquerque

PARA AMBOS OS SEXOS

PORTO — Rua de Santa Catarina, 1500

TELEFONE N.º 8894

Curso Primário Curso Comercial Curso Liceal (completo)

AULAS DIURNAS E NOCTURNAS

Casa-Escola de Oliveira de Azeméis

INTERNATO, SEMI-INTERNATO E EXTERNATO

INSTRUÇÃO PRIMÁRIA, ADMISSÃO AO LICEU, CURSO
LICEAL, CURSO COMERCIAL, PIANO E LAVORES

RUA DE ANTÓNIO ALEGRIA

OLIVEIRA DE AZEMÉIS

COLÉGIO CASTILHO

S JOÃO DA MADEIRA TELEFONE, 50
(PARA AMBOS OS SEXOS)

Em regime de planos oficiais e próprios—(Alvará de autorização n.º 16)

Cursos: Primário, Comercial, Geral dos Liceus, Pintura, Piano e Lavores

INTERNATO, SEMI-INTERNATO E EXTERNATO

Corpo docente proficienteíssimo, recrutado em parte no professorado do Porto.
Magníficos resultados nos exames oficiais — Alimentação sã e abundante. Excelente
situação topográfica que permite aos alunos respirarem o ar puro dos campos e da montanha

REABRE NO DIA 7 DE OUTUBRO

Director: Professor JOSÉ CERQUEIRA DE VASCONCELOS
Jornado em Filologia pela Faculdade de Letras da Universidade de Paris

EXTERNATO 29 DE OUTUBRO

Praça Nuno A'lvares
MURTOSA

HABILITA PARA:

Exames de Instrução Primária

Admissão aos Liceus

Curso Complementar do Comércio

Curso Liceal

Resultados dos exames do ano
lectivo de 1937-38

100 % de aproveitamento

Ano lectivo de 1938-39

4.ª classe: 100 % de resultados positivos.

2.º ano de Comércio: 100 % de aproveitamento.

3.º ano de Comércio: 100 % " "

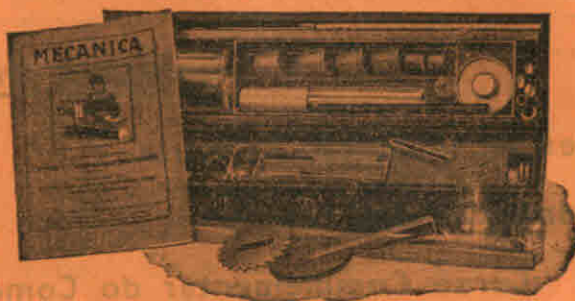
3.º ano dos Liceus: 100 % de aprovações.

Exames de admissão: 79 % de aprovações.

Pedir informações à Direcção.

MATERIAL PEDAGÓGICO MODERNO SATISFAZENDO AOS PROGRAMAS OFICIAIS

Quadros, Álbuns, Mapas, Fitas, Globos, Modelos, etc.
Colecções de aparelhos, condensando o ensino com grande economia
de material e de espaço. Adoptadas nas Escolas Secundárias Ale-
mãs. Centenas de experiências numa caixa, com instruções.



MATERIAL PARA LABORATÓRIOS E TRABALHOS PRÁTICOS

DE FÍSICA, QUÍMICA, CIÊNCIAS NATURAIS,
GEOGRAFIA, HISTÓRIA, MATEMÁTICAS, ETC.

Instrumentos, aparelhos, acessórios, vidra-
ria, porcelanas, reagentes, ferramentas.

MATERIAL DE DESENHO E TODOS OS INSTRUMENTOS DE PRECISÃO

A casa que maior sortimento apresenta em material de boa
qualidade, a preços resumidos.

Descontos especiais para revenda e para Escolas.

PIMENTEL & CASQUILHO, L.^{DA}
ENGENHEIROS

Rua Eugénio dos Santos, 75 — LISBOA

Telef. 20777

Teleg. TECNA

1170 Labor

Revista mensal de educação e ensino e extensão cultural

Directores: JOSÉ TAVARES e ÁLVARO SAMPAIO

Editor: JOSÉ TAVARES

Administrador: ARMANDO COIMBRA

Redacção e Administração — LICEU DE AVEIRO

ANO XIV
(2.ª série)

AVEIRO — DEZEMBRO DE 1939

Comp. e Imp. na "Gráfica Aveirense, Lda" — AVEIRO

N.º 104

ESTE NÚMERO FOI VISADO PELA
COMISSÃO DE CENSURA

*Ciências matemáticas, ciências físico-
químicas, ciências naturais*

Resolução da equação bi-quadrada no caso de $b^2 - 4ac < 0$, pelo processo goniométrico

1 — Vimos que a equação $az^4 + bz^2 + c = 0$ (1)
no caso de $b^2 - 4ac > 0$ se podia resolver pela fórmula

$$z = \pm i \sqrt{\frac{b}{c}} \operatorname{sen} A \quad (2) \quad \text{para } c < 0$$

sendo o ângulo A dado pela expressão:

$\operatorname{sen} 2A = \pm i \frac{2}{b} \sqrt{ac}$; mas vimos também que essa solução
era impossível por este processo no caso de $b^2 - 4ac < 0$;
neste caso na equação bisséctória que serviu de comparação para
deduzirmos a fórmula resolvente

$$x^4 - 4x^2 + x = 0 \quad (3)$$

correspondia com $y = \frac{16ac}{b^2}$, $y = 4 \operatorname{sen}^2 2A > 4$ que tornava

impossível considerar a relação (3) como bissectória, isto é, como relação entre a corda do arco simples x e a corda do arco duplo y .

2— Vejamos então uma forma de achar as 4 raízes imaginárias da equação

$$az^4 + bz^2 + c = 0 \quad (1) \quad \text{no caso de } b^2 - 4ac < 0$$

Na equação auxiliar, do tipo $ax^2 + b = 0$ que se pode reduzir a equação (3), que é

$$x^2 - 4x^2 + y = 0 \quad \text{com } z = \pm i \sqrt{\frac{b}{4a}} x$$

$$\text{substituindo } x = 2 \times \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{2i} = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{i}, \quad \pm \sqrt{y} = \frac{e^{2ia} - e^{-2ia}}{i}$$

que são os dôbros dos valores dos senos dum arco imaginário e do arco duplo, era fácil de verificar que com esta substituição (3) se reduzia a uma identidade.

$$\text{Resolvamos } \pm \sqrt{y} = \frac{e^{2ia} - e^{-2ia}}{i} \quad \text{em ordem a } e^{2ia}$$

$$\pm i \sqrt{y} = e^{2ia} - e^{-2ia}$$

$$e^{4ia} \pm i \sqrt{y} e^{2ia} - 1 = 0$$

$$e^{2ia} = \pm i \frac{\sqrt{y}}{2} \pm \sqrt{\frac{4-y}{4}} = i \left[\pm \frac{\sqrt{y}}{2} \pm \sqrt{\frac{y}{4} - 1} \right]$$

$$\text{Fazendo } \pm \frac{\sqrt{y}}{2} = \operatorname{cosec} 2A \quad \text{obtemos:}$$

$$e^{2ia} = i [\operatorname{cosec} 2A \pm \operatorname{ctg} 2A]$$

Ou seja, operando

$$e^{2ia} = i \frac{1 \pm \cos 2A}{\operatorname{sen} 2A}$$

$$\begin{cases} [2^{ia}]_1 = i \frac{2 \cos^2 A}{2 \operatorname{sen} A \cos A} = i \operatorname{ctg} A \\ [e^{2ia}]_2 = i \frac{2 \operatorname{sen}^2 A}{2 \operatorname{sen} A \cos A} = i \operatorname{tg} A \end{cases}$$

Portanto:

$$[e^{ia}]_{1,2} = \pm \sqrt{i \operatorname{ctg} A}; \quad [e^{ia}]_{3,4} = \pm \sqrt{i \operatorname{tg} A}$$

$$x = \frac{e^{ia} - e^{-ia}}{i} = \frac{\pm \sqrt{i \operatorname{ctg} A} \pm \sqrt{-i \operatorname{tg} A}}{i}$$

$$\text{ou } x = \pm \sqrt{\pm i \operatorname{ctg} A} \pm \sqrt{\pm i \operatorname{tg} A}$$

3— *Discussão e simplificação destas fórmulas.*

Vemos que temos de conjugar os 4 valores $\pm \sqrt{\operatorname{ctg} A}$, $\pm \sqrt{\operatorname{tg} A}$, com os 4 valores de $\sqrt{\pm i} = \sqrt[4]{-1}$

Calculemos:

$$\sqrt[4]{(-1)} = \cos \frac{2k \times 180 + 180}{4} + i \operatorname{sen} \frac{2k \times 180 + 180}{4} \\ = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} (1 \pm i)$$

$$x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} [1 \pm i] \sqrt{\operatorname{ctg} A} \pm \frac{\sqrt{2}}{2} [1 \pm i] \sqrt{\operatorname{tg} A} = \\ = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} [\sqrt{\operatorname{ctg} A} \pm \sqrt{\operatorname{tg} A}] \pm \frac{\sqrt{2}}{2} i [\sqrt{\operatorname{ctg} A} \pm \sqrt{\operatorname{tg} A}]$$

Simplificando as expressões contidas nos parêntesis, a escolha conveniente dos sinais conduz-nos ao resultado:

$$x = \pm \sqrt{\frac{2}{\operatorname{sen} 2A}} \times [\operatorname{sen} (45^\circ + A) \pm i \cos (45^\circ + A)]$$

Com efeito, quadrando e somando os valores corresponden-

